Bilan: $\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} & \text{si } x \le 1 \\ \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + x\text{Log}x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b- $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} + x\text{Log}x\right]$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\text{Log}x}{x}\right)\right] = +\infty.$

c- f est continue sur IR $\Rightarrow$ la fonction $(x \mapsto xf(x))$ est continue sur IR.

Par suite la fonction $\varphi : x \mapsto \int_1^x tf(t)dt$ est la primitive sur IR de fonction précédente qui s'annule en 1.

$\Rightarrow \varphi$ est dérivable sur IR.

- $\forall x \le 1; \varphi'(x) = x$
- $\forall x > 1; \varphi'(x) = xf(x) = x + \text{Log}x > 0$ (car $\forall x > 1; \text{Log}x \ge 0$)

D'où le tableau de variation de φ

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

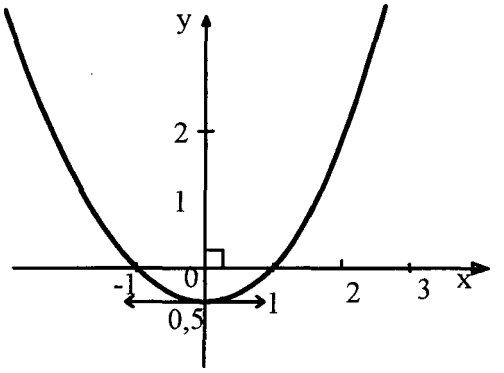
$\lim\limits_{-\infty} \varphi = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) = +\infty.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x = -\infty$

$\Rightarrow$ la courbe de φ possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{\text{Log}x}{x}\right)\right] = +\infty.$

$\Rightarrow$ la courbe de φ possède une branche parabolique infinie de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



B-1/ $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t.g_n(t)dt$ et $g_n(t) = t^n \sin t$.